REAL ACADEMIA DE DOCTORES

D I S C U R S O

leído en el acto de su recepción

por el

Excmo. Sr. Dr. D. Dario Maravall Casesnoves

LAS MATEMATICAS DE LOS FENOMENOS HEREDITARIOS

Depósito Legal: M-42092–1980
Ibérica. Tarragona, 34. Madrid-7

Excmo. Sr. Presidente
M.I. Cuerpo Doctoral
Sras. y Srs.:

En primer lugar quiero expresaros mi agradecimiento por el gran honor que me habéis hecho, al elegirme académico de número de esta Real Academia de Doctores. Pobres y escasos son mis méritos para poder corresponder a vuestra benevolencia para conmigo, y solamente puedo ofreceros mi entrega apasionada de siempre al estudio, a la investigación y a la publicación científica, actividades que han sido hasta ahora, y espero, sigan siendo en el futuro, el norte de mi vida. En mi doble condición de Doctor en Ciencias Matemáticas y de Doctor Ingeniero Agrónomo, os doy dos veces las gracias.

Antes de entrar en el tema de mi discurso que es las matemáticas de los fenómenos hereditarios, seánme permitidas unas palabras, para explicar porque he escogido este tema. Después de algunas dudas lo he escogido por dos razones, una de ellas porque es materia interdisciplinar, como lo es esta Real Academia de Doctores. Cualquier aportación a ella, lo es no solo a las matemáticas puras, sino también a las aplicadas, y dentro de su ámbito de aplicación están la física, la biología y la economía. La otra razón es, que es materia, a cuyo estudio e investigación he dedicado mucho tiempo, y sobre cuyos desarrollos matemáticos y aplicaciones a otras ciencias he publicado ya ampliamente.

Procuraré dar una visión panorámica de los fenómenos hereditarios, muy personal, exponiendo las cosas tal como yo las veo, no como puedan verlo o lo hayan visto los grandes maestros de la matemática. Por esta razón será seguramente defectuosa mi exposición, pero lo que si será es original. En una exposición panorámica, creo que hay que huir del doble peligro que siempre le acecha, de un lado el ser demasiado detallista y minucioso amenaza con lo que dice el conocido refrán popular: "que los árboles no dejan ver el bosque", pero por otra parte el preciosismo o esteticismo de querer ser demasiado panorámico, demasiado general, puede incurrir en el defecto contrario, de que por querer contemplar demasiado bien el bosque, no veamos los árboles, incluso en un caso extremo podríamos no llegar a darnos cuenta de que un bosque está formado por árboles.

Los resultados sobre ecuaciones integrales e integrodiferenciales, así como sobre ecuaciones diferenciales de índices no enteros en la derivación (oscilaciones fraccionarias), lo son de investigaciones que me son propias.

Pasemos al tema del discurso.

Vamos a tratar unificadamente un fenómeno temporal (la herencia) y otro espacial (la acción a distancia) porque aunque distintos, su matematización es parecida. Ambos fenómenos encuentran aplicación en Física y en Biología, y de paso veremos que aun cuando la Biología no está hoy por hoy tan matematizada como lo está la Física, y es casi seguro que nunca lo estará, sin embargo, una parte de la Biología tiene bien ganado el adjetivo de matemática.

Mientras que la Física y las Matemáticas, están muy íntimamente relacionadas entre sí, desde los tiempos de los griegos, la penetración de estas Ciencias en el terreno de la Biología es relativamente reciente. Hay precedentes de trabajos en Biología Matemática en los siglos XVII (Graunt), en el XVIII (Deparcieux, Süsmilch), pero sus comienzos son seguramente de la segunda mitad del XIX (Galton, Pearson, Quetelet), pero es desde hace medio siglo aproximadamente cuando la Biología Matemática se constituye como una ciencia propiamente dicha, con su problemática y su metodología.

Vemos, pues, que la penetración de las Matemáticas en el campo de las Ciencias Naturales, es lento, se va realizando mediante etapas sucesivas, al principio los científicos se comportan de manera tímida e insegura, comienzan por el planteamiento matemático de un problema biológico, mediante la elaboración de modelos ideales, algo ingenuos por su simplicidad, y utilizan solamente métodos matemáticos particulares, los estrictamente necesarios para el caso, los cuales desempeñan simplemente el papel meramente auxiliar de instrumento conveniente o incluso necesario. pero nada más. No se ha producido un intercambio de ideas entre la Biología y las Matemáticas.

En esta primera etapa únicamente se observa una multitud de métodos matemáticos dispersos y desligados entre sí, multitud amorfa todavía no estructurada. Pero se ha conseguido algo muy importante, se ha roto el hielo, se ha puesto en marcha un aparato de potencia colosal para el progreso de la Ciencia Natural. La labor de estos pioneros, como los de cualquier otra actividad científica, es admirable, porque es un auténtico alarde de ingenio y talento.

Se pasa de esta primera etapa, a otra segunda, en la que los sabios comienzan un proceso de generalización y de unificación de los conocimientos científicos, ahora la preocupación fundamental es la elaboración de estructuras abstractas, independientes de las ciencias particulares, que constituyen el substratum de las mismas, las cuales incluyen en su seno múltiples métodos que se utilizan en la resolución de problemas, que aunque a veces muy distintos y apartados entre sí, sus diferencias residen especialmente en el significado concreto que se dé a los simbolismos matemáticos que constituyen como el abecé de los métodos, previamente desarrollados en su primitiva pureza. En el estructuralismo se tiende a reforzar o resaltar lo que une, y a debilitar u ocultar lo que desune o separa.

Se consigue así un gran ahorro de fuerza intelectual, lo que de un lado permite abarcar a una misma persona un campo más amplio de actividad científica, con el mismo trabajo, y de otro establecer un nexo de unión entre fenómenos, que hace posible transportar los conocimientos de un cierto sector más adelantado de la ciencia a otro más atrasado, haciéndole dar saltos de gigante. De esta manera se puede ir haciendo Ciencia por partida doble, al igual que existe un principio de dualidad en Algebra y Geometría, se puede decir que también existe un principio de dualidad en la investigación científica en general, con una misma metodología que sirva a una múltiple fenomenología. La historia de la Ciencia contradice el refrán popular "quien mucho abarca poco aprieta", un poco en broma podríamos inventar otro refrán "quien se extiende, profundiza".

Existe una profunda diferencia entre las Matemáticas puras y las aplicadas, incluyendo dentro de éstas las Ciencias particulares (Física, Biología, Economía) que llevan el adjetivo de matemáticas. Las primeras en su inmaculada pureza, parten de ciertos postulados, generalmente en número reducido, y de un pequeño número de definiciones y por medio de largas cadenas de razonamientos se van deduciendo los teoremos que constituyen el cuerpo de doctrina de las Matemáticas, evitando que se infiltren en su razonar, elementos ajenos. Por el contrario en sus aplicaciones a las Ciencias de la Naturaleza, las Matemáticas no se mantienen tan puras, los científicos en determinados puntos cruciales de su labor, separados entre sí por trechos más o menos largos de razonamientos, sienten la necesidad para poder seguir avanzando de introducir hipótesis secundarias, que introduzcan elementos ajenos a la Matemática, elementos que son el producto de la combinación de generalizaciones, sin las que no es posible la ley científica, y de restricciones, sin la cual no hay posibilidad de establecer correspondencias entre las ideas puras y los hechos del mundo real. Hay que materializar los modelos científicos, si se quiere que éstos sean útiles para satisfacer las necesidades prácticas; hay que soldar la teoría con la práctica. Del equilibrio entre la generalización y la restricción, de lo abstracto y lo concreto, vive la Ciencia; el pensamiento como reflejo o copia de la realidad es una de las aportaciones fundamentales de la lógica dialéctica a la teoría del conocimiento científico.(*)

(*) Más concretamente, se trata de una aportación de Lenin a la filosofía científica.

La tercera y última etapa de la Historia de la matematización de las Ciencias particulares, es el de la axiomatización, en ella se sustituyen los conceptos vagos y poco precisos, por conceptos perfectamente definidos, cuyo comportamiento es absolutamente racional, obedecen a leyes del pensamiento inmutables, que permiten construir un sistema científico cerrado, autoevolutivo, en donde no hay que inventar, sino sólo hay que descubrir. El proceso de conocer consiste en ir desenterrando las verdades, verdades que tienen vida propia antes de ser conocidas, que están pacientemente esperando, que llegue el sabio que tropiece con ellas y las saque a la luz, como el oro está bajo tierra, esperando que lleguen los buscadores de minas que lo saquen de dentro de las entrañas de la tierra. Como ya he dicho en otras ocasiones "existir es poder ser conocido".

Uno de los primeros intentos de aplicar en grande las Matemáticas a la Biología es el ensayo de una teoría matemática de las asociaciones biológicas, en lucha entre sí por la existencia, iniciada y desarrollada con bastante amplitud por Volterra. En esta teoría la Biología pone las ideas contenidas en el "Origen de las Especies" de Darwin, especialmente el de la lucha por la existencia como uno de los factores más importantes de la selección natural. Las matemáticas ponen el método, en este caso concreto las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales. La hipótesis de los encuentros, es una idea básica introducida por Volterra que utiliza constantemente en toda su teoría matemática de la lucha por la existencia (biocinética), idea que no es nueva en Biología, sino que se encontraba ya en otras teorías físicas y químicas, por ejemplo teoría cinética de gases, leyes de acción de masas del equilibrio químico, teorías de la recombinación iónica, de la fotoconductividad cristalina, etc. (*).

Según esta hipótesis de los encuentros, la posibilidad del encuentro de dos individuos de dos especies distintas, o de sexo distinto dentro de la misma especie, es proporcional al producto de los números totales de individuos de una y otra.

Yo mismo he investigado ampliamente sobre estas materias, demostrando por ejemplo que la existencia de posiciones de equilibrio en las asociaciones biológicas y de fluctuaciones en torno a estas posiciones de equilibrio, no solamente se obtienen con la hipótesis de los encuentros de Volterra, sino incluso bajo condiciones mucho más generales. Se pueden hacer hipótesis mucho menos restrictivas, que engloban como un caso particular las de Volterra, sin que se pierda el carácter periódico estacionario de las asociaciones biológicas. He generalizado el concepto demasiado restrictivo de parasitismo de la Biología clásica, sustituyéndolo por uno mucho más general, dotado de definición analítica y susceptible de medición. Según mi concepto, el parasitismo así generalizado adquiere signo, siendo el negativo lo que en Biología clásica se llama simbiosis.

(*) He aplicado esta hipótesis de los encuentros a mis teorías probabilistas de los fenómenos que acabamos de citar.

Incluso he extendido estas ideas de la lucha por la existencia entre especies biológicas, y del equilibrio biológico, a la Economía de la competencia y a la lucha por la existencia entre las dos especies económicas de grandes y pequeños capitalistas, analizando la correspondencia entre las fases de depresión y de prosperidad con las de aumento o disminución de una de las dos especies de capitalistas o empresarios, y la posibilidad, o mejor dicho la existencia de un doble sentido en el recorrido periódico de las sucesivas fases.

He investigado con bastante profundidad y detalle un tipo de ecuaciones integrales e integrodiferenciales, en las que la función incógnita aparece bajo el signo integral como función de núcleo cerrado, y los límites de la integral son fijos, en vez de variables. He demostrado que bajo condiciones muy generales, para los núcleos subintegrales, que incluso en vez de ser funciones pueden ser funciones generalizadas (distribuciones) es decir: pseudofunciones, partes finitas de integrales, etc., pueden existir soluciones oscilantes (expresables mediante sumas de un número finito de senos y cosenos) de las antecitadas ecuaciones integrales. A este tipo de oscilaciones las he denominado hereditarias a unas y *teleológicas* a otras; se diferencian de las lineales clásicas, que como es sabido, se representan analíticamente por ecuaciones, diferenciales lineales de coeficientes constantes en propiedades muy notables y curiosas tales como las siguientes: las soluciones son exponenciales cuyos exponentes son las raíces de una ecuación trascendente, en vez de algebráica, pueden existir soluciones en número infinito numerable, pueden presentarse discontinuidades en las soluciones, pueden no existir oscilaciones libres y en cambio sí, forzadas. Se puede establecer un principio de dualidad entre estas ecuaciones integrales y las de núcleo cerrado de la Cibernética y los Servomecanismos (Automática). Las ecuaciones que aparecen en la Rheología y la Viscoelasticidad son de este tipo mío, y encuentran sus soluciones exactas por estos métodos que me son propios.

Me refiero a ecuaciones integrodiferenciales de la forma:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \frac{d^r y}{dt^r} + \int_{-\infty}^{t} \sum_{s=0}^{m} k_s (t-\tau) \frac{d^s y}{d\tau^r} d\tau = f(t) \qquad (1)\ (*)$$

en donde las a son coeficientes constantes, y los supraíndices r y s indican el orden de la derivada. En ellas hay efectos retardados debidos a las *funciones de memoria* k. Son también interesantes las que resultan de sustituir en (1) t y $-\infty$ por ∞ y t respectivamente en los límites de la integral, y entonces es el futuro el que influye sobre el presente, de aquí los nombres de *teleológicas* que he dado a sus soluciones y de *funciones de previsión* a las correspondientes k. Me he encontrado con este tipo de ecuaciones integrales en mis investigaciones sobre el movimiento browniano gene-

(*) El segundo miembro de (1) puede ser cero.

ralizado. Admiten diversas extensiones o prolongaciones, como las de sustituir la integral simple por una doble o múltiple y las k por funciones de dos o varias variables. También ofrecen interés las que resultan de sustituir en la parte diferencial las derivadas ordinarias por derivadas parciales. Véase mi memoria: "las soluciones exactas de un tipo de ecuaciones integrales de la Rheología y de la Viscoelasticidad y sus consecuencias físicas" (publicada en la revista de la Real Academia de Ciencias. 1978), donde se indican también las referencias bibliográficas de mis otros trabajos sobre este tema.

Las técnicas matemáticas que he utilizado en las investigaciones anteriores están basadas preferentemente en el Cálculo Simbólico, también llamado Operacional, especialmente en las transformaciones integrales de Laplace y Fourier, como consecuencia de lo mismo me he encontrado con fenómenos de oscilaciones que he denominado fraccionarias, que son soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, pero de índices no enteros en la derivación (derivación e integración fraccionarias). Existe para ellas un fenómeno típico de resonancia y el estudio de su estabilidad conduce a desarrollos matemáticos muy curiosos, con repercusiones en las transformaciones funcionales. Entre estas oscilaciones fraccionarias son dignas de destacar aquéllas en las que los índices de derivación son semienteros y para ellas las funciones de error integral de variable real y compleja desempeñan el mismo papel que las exponenciales y trigonométricas para las oscilaciones clásicas. En algunos de mis libros hay abundante información sobre esta materia.

Estas ecuaciones integrodiferenciales (las primeramente citadas, no las fraccionarias) son apropiadas para describir el fenómeno de la intoxicación del medio de la demografía microbiana, en virtud del cual la estructura material del medio en que viven los microorganismos es modificado por el hecho de vivir en él, en otras palabras, la estructura del medio no es un invariante del fenómeno, como consecuencia de las toxinas producidas por los microorganismos. También son apropiadas para describir fenómenos de simbiosis biológical bilateral en la que ambas especies se aprovechan mutuamente de su asociación, así como de simbiosis biológica unilateral en la que una de las especies resulta beneficiada, mientras que la otra si bien no se beneficia de la asociación, tampoco se perjudica. Obsérvese cómo lo que hemos llamado simbiosis biológica unilateral es un caso intermedio entre el parasitismo y la simbiosis biológica bilateral, que quizás en términos correctos sea la auténtica simbiosis. El fenómeno de la intoxicación del medio es susceptible de explicarse por los métodos de Volterra, y así ha sido tratado por este autor y su escuela, pero en este caso sólo existe la posibilidad de comportamiento monotónico y nunca oscilante; para que aparezca oscilación (periodicidad en el tiempo) se requiere el enfoque del problema y los métodos matemáticos de tratamiento basados en mis anteriores ecuaciones integrales e integrodiferenciales.

Hasta fines del siglo XIX los científicos consideran que la evolución de los sistemas naturales, es decir, el cambio en el tiempo de los valores de las magnitudes que definen un sistema concreto, dependen únicamente de los valores que tenían en instantes anteriores infinitamente próximos, porque a ello equivale el planteamiento matemático mediante ecuaciones diferenciales. Es un punto de vista local porque únicamente tiene en cuenta lo que sucede en un entorno inmediato al presente, se puede decir que el conocimiento del presente hace inútil el del pasado en la previsión o conocimiento del futuro. Parece como si los fenómenos naturales no tuviesen memoria, no les interesase su pasado y que a medida que transcurre el tiempo van olvidándose de lo que fueron. En un panorama así de la Ciencia la Historia no tiene sentido en la misma, no desempeña ningún papel, y los fenómenos naturales son invariantes para cualquier traslación en el tiempo, es indiferente cuál es el origen en el tiempo, porque cualquiera que sea éste, se repite exactamente el proceso de evolución del sistema natural.

Este aspecto o enfoque de la metodología científica que antes hemos denominado local me parece que es el resultado de aplicar un principio de fragmentación en el tiempo, en cierto modo similar al principio de fragmentación en el espacio que se utiliza en la Mecánica y en otras ramas de la Física. La influencia del pasado sobre el futuro se hace siempre a través del presente, porque éste a su vez fue en cierto tiempo futuro de lo que hoy es el pasado y entonces condicionó el presente actual, pero una vez condicionado éste, entonces, se borra, se pierde para siempre su influencia. De acuerdo con esta óptica, la evolución de los sistemas naturales, es una evolución de instante en instante, una propagación en el tiempo por contacto y no por acción a distancia; por esta razón he bautizado con el nombre de local este aspecto de la Ciencia.

En sus investigaciones sobre Física y Biología, Volterra introdujo el importante concepto de *herencia,* que no hay que confundir con el sentido vulgar de la palabra, que es también el de algunas ciencias como la Genética; la herencia en el sentido de Volterra es una influencia directa del pasado sobre el futuro; el futuro viene condicionado directamente por todo o parte del pasado, y el conocimiento del presente no es suficiente para el conocimiento o previsión del futuro; es preciso conocer total o parcialmente la historia del sistema natural. Su planteamiento matemático se hace mediante ecuaciones integrales. A este enfoque metodológico de la Ciencia, lo he denominado aspecto global porque la propagación en el tiempo no es por contacto, es decir de instante a instante, sino, por una especie de acción a distancia, existe una influencia de lo que sucede en un instante sobre lo que va a suceder en un instante posterior separado del primero por un intervalo temporal finito.

He demostrado que el aspecto global, engloba como caso particular al aspecto local, demostrando que las ecuaciones diferenciales se pueden obtener como límites generalizados de ecuaciones integrales, entendiendo la palabra límite no en el sentido del Análisis Matemático clásico sino en un sentido muy distinto (para los detalles pueden consultarse mis libros). Es indudable que las técnicas matemáticas del aspecto local son mucho más sencillas que las requeridas por el aspecto global.

Los fenómenos hereditarios se presentan en Biología, por ejemplo en Biocinética, que estudia matemáticamente las teorías del equilibrio biológico basadas en la lucha por la existencia entre especies que se alimentan unas de otras o que se disputan sobre el mismo terreno la misma alimentación. También tienen estos fenómenos hereditarios especial importancia en algunas ramas de la Física, por ejemplo en Elasticidad, donde todo especialista sabe que la resistencia que opone cualquier estructura a la deformación no solamente depende de los esfuerzos que tiene que soportar, sino también de los esfuerzos que ha soportado en el pasado. Los fenómenos de *histéresis* son de tipo hereditario.

Algunos filósofos han analizado con bastante profundidad el concepto de tiempo, poniendo de relieve el papel extraordinario que en Biología juega la finalidad en la actividad de los seres vivos. Distinguen entre tiempo físico y tiempo biológico, para ellos en este último, es el futuro quien determina el presente. Como he dicho anteriormente mis anteriores ecuaciones integrodiferenciales son la traducción al lenguaje matemático de estas ideas filosóficas, que hasta la fecha creo que no habían sido representadas analíticamente. Son las que anteriormente dije que había bautizado con el nombre de oscilaciones *teleológicas,* pero he de insistir que también es posible, un comportamiento monotónico teleológico. La diferencia entre comportamiento oscilante y monotónico (unidireccional) depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica trascendente, es decir, de los exponentes de las exponenciales que describen matemáticamente el comportamiento de los sistemas naturales.

Contrariamente a lo que sucede en Biología y que también puede suceder en Economía y Sociología, lo teleológico es inconcebible en Física. Si a veces se deslizan furtivamente soluciones teleológicas en las ecuaciones de la Física Matemática, basta la posesión de este carácter para que sean descartadas, diciendo que carecen de significado físico.

Ya que hemos hablado del tiempo físico y biológico vamos a hacer un pequeño inciso sobre un problema tan importante como lo es el del tiempo, sin adentrarnos en la profunda modificación que ha sufrido este concepto con la aparición de la teoría de la Relatividad, con su correspondiente fusión entre espacio y tiempo en la Relatividad restringida, entre espacio, tiempo y materia (gravitación) en la Relatividad general, y entre espacio, tiempo, materia y electricidad en las teorías relativistas del campo unificado. El tiempo es un concepto primario de la Física y ha suscitado desde los principios de la Filosofía hasta el momento actual sin fin de polémicas y discusiones. Hasta el hombre de la calle cree tener una noción exacta de lo que es el tiempo, noción que prácticamente coincide con la que utilizan la mayoría de los sabios en sus investigaciones, salvo, en algunos pocos problemas muy específicos y de extraordinaria dificultad e importancia. Una cosa es creer que sabemos algo y otra muy distinta ser capaces de poder explicar inteligiblemente ese conocimiento íntimo nuestro a otras personas.

El aforismo latino: *post hoc, ergo propter hoc,* está íntimamente ligado al conocimiento de la flecha del tiempo, es decir, de la dirección de antes a después en que fluye el tiempo, que si se prescinde de la conciencia, es uno de los problemas más difíciles que hay planteados hoy. La dificultad es mucho mayor en la Microfísica que en la Macrofísica, si se tienen en cuenta intervalos de tiempo infinitesimales, a mí me parece que el tiempo no es una variable cierta sino una variable aleatoria, que a medida que aumenta la duración del intervalo de tiempo converge en probabilidad a una variable cierta; tal como resulta de mis investigaciones sobre la inversión en el tiempo de procesos estocásticos y de la simultaneidad de dos o más procesos estocásticos, por ejemplo, del movimiento browniano y de la desintegración radiactiva.

Hay que tener en cuenta que para el científico las cosas existen si pueden ser conocidas, que en la Ciencia natural la existencia es una propiedad pasiva y potencial, que existir es poder ser conocido. Por eso surgen esas grandes dificultades ligadas al principio de causalidad y a la flecha del tiempo.

Lo hereditario y lo teleológico pueden introducirse también cuando el tiempo es una variable discreta en vez de continua, y para resolver este problema he planteado, y resuelto las que he llamado ecuaciones *sumatorias:* estas ecuaciones sumatorias están con las ecuaciones en diferencias finitas en la misma relación que las ecuaciones integrales con las diferenciales. Para dar una idea somera de cómo influye el lenguaje de la Matemática Moderna en esta nueva problemática, diré que la resolución de estos tipos de ecuaciones integrales, desde un punto de vista algebraico, consiste en sustituir un anillo sin divisores de cero (el anillo de las funciones con transformadas de Laplace), mediante un cambio de topología, en un anillo con divisores de cero (el anillo de las distribuciones con transformadas de Laplace) en que los divisores de cero (que son exponenciales representables por integrales de Laplace, cuya función subintegral no es una función, sino una distribución delta de Dirac) son precisamente las soluciones de este tipo de ecuaciones integrales.

Paralelamente a la introducción de la herencia, se puede introducir una acción a distancia en el espacio, mediante un formalismo matemático algo más generalizado. Para este nuevo planteamiento he considerado ecuaciones integrodiferenciales en derivadas parciales, agregando un término correctivo expresivo de la acción de la herencia sobre la evolución temporal de sistemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales clásicas, o agregando un término correctivo expresivo de la acción perturbadora que en un instante dado se ejerce sobre un punto del sistema por las deformaciones sufridas en los restantes puntos del sistema. De forma que en este último caso no puede hablarse de herencia en el tiempo, en el sentido de una influencia de los estados ancestrales por los que ha pasado el sistema sobre su configuración en el presente, sino más bien en una llamémosle así *herencia* en el espacio, es decir, de una especie de acción a distancia mediante la cual la configuración que en una cierta región del espacio adopta el sistema influye sobre la que adopta en cualquier otra parte; se trata de una interacción entre elementos distintos de un mismo sistema expresable por una función de las diferencias absolutas de coordenadas.

Como digo no se puede hablar de una herencia en el tiempo, sino de una pérdida de validez del principio de la solidificación o fragmentación en el espacio, que se utiliza en Mecánica y en las distintas ramas de la Física; al no admitir como válido este principio de solidificación en el espacio, estimamos que ningún fragmento del sistema puede considerarse como aislado y que para poder prever el comportamiento de un fragmento del sistema es preciso conocer el estado en que se encuentra todo él. Por analogía con los fenómenos hereditarios temporales en el que es preciso el conocimiento de la historia del sistema, estimo que es preciso conocer en el caso de fenómenos *hereditarios* espaciales la geografía (o topografía si se quiere) del sistema para llegar a poder prever su evolución futura.

Con relación al párrafo anterior he investigado con bastante profundidad y detalle las generalizaciones hechas por mí en este sentido de las ecuaciones clásicas de la propagación del calor y de la propagación de ondas, obteniendo desarrollos matemáticos muy largos y curiosos, que afectan entre otros campos matemáticos al de la teoría de las funciones trascendentes superiores y al de las transformaciones funcionales. Se puede operar en forma parecida sobre cualquier otro tipo de ecuaciones clásicas en derivadas parciales y es seguro que se han de obtener resultados interesantes. Como curiosidad diré que estas ecuaciones integrales que he investigado, las he aplicado en Economía, a mercados con intermediarios, en donde la oferta y demanda de un intermediario se corresponden con la demanda del intermediario posterior y la oferta del anterior respectivamente.

A lo largo de los años los matemáticos han ido elaborando por abstracción una serie de estructuras: de orden, algebraicas, topológicas. Entre las segundas figuran las de grupo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc...; a esta clase de estructuras pertenece el espacio que yo llamo *aleatorial*. Los espacios aleatoriales tienen aplicación en Economía, a problemas de rentas aleatorias que son los primeros en los que me tropecé con ellos, de aquí el nombre de aleatores que puse a los elementos de estos espacios, también tienen aplicaciones en Biología a problemas de asociaciones biológicas; en Sociología a problemas de división de sociedades humanas en castas, y en Matemática Pura a transformaciones funcionales, cálculo de probabilidades, ecuaciones diferenciales, geometría, etc... Son casos particulares de aleatores los objetos matemáticos que he llamado gravitores, básicos en geometría de masas, y catenores, básicos en probabilidades en cadena. Así como la suma ordinaria es un proceso sin memoria según el cual, una vez obtenida la suma, ésta es independiente del número de sumandos que ha contribuido a la misma, pudiéramos decir que la suma se olvida del número de sumandos; por el contrario en los espacios aleatoriales surge una operación de suma con memoria en la que interesa tanto el valor final de la suma como el número de sumandos que hayan contribuido a la misma. En pocas palabras la axiomática de un espacio aleatorial es la siguiente: sea G un grupo cualquiera (conmutativo o no) y S un semigrupo conmutativo con elemento neutro y en el que es válido la regla de simplificación; se dice que S es un espacio aleatorial sobre G y sus elementos se llaman aleatores cuando existe sobre S una ley de composición externa, cuyo dominio de operadores es el grupo G, de modo que el producto de un operador por un aleator, es distributivo respecto a los aleatores, asociativo para los operadores, y conserva el aleator para el producto por el elemento unidad de G. Cuando S y G son topológicos y el producto de un operador por un aleator es continuo, entonces el espacio aleatorial es topológico.

Las anteriores investigaciones me han llevado a formular un principio de correspondencia matemática, en virtud del cual, se puede enunciar el principio de: que todo estado discontinuo de la naturaleza es límite generalizado (lo llamo G-límite) de estados continuos.

Como curiosidad voy a hacer algunas observaciones sobre la teoría de las emociones. Mientras que la teoría de las sensaciones es objeto de la Biofísica, la teoría de las emociones sería objeto de lo que propongo llamar Noofísica, nombre que nos es sugerido por el nuevo concepto introducido por Teilhard de Chardin para designar la capa del pensamiento reflexivo y paralelamente llama Noogénesis a la aparición de hombre en la tierra. Para más detalles ver mis libros.

Las ecuaciones integrales que se presentan en Rheología y Viscoelasticidad son un caso particular de la (1), y entre las consecuencias físicas que se desprenden de su estructura matemática, figuran la posibilidad de existencia de movimientos internos espontáneos (sin fatiga) en líquidos viscoelásticos o de Maxwell, y en sólidos de Kelvin, y recíprocamente la existencia de fatigas sin deformaciones. Se puede obtener de esta forma la solución exacta de las ecuaciones integrales de los cuerpos boltzmannianos (véase mi memoria antes citada "las soluciones exactas de las ecuaciones integrales de la Rheología y de la Viscoelasticidad y sus consecuencias físicas". Revista de la Real Academia de Ciencias. 1978).

La ecuación (1) admite diversas generalizaciones, entre las que están la posibilidad de definir funciones de memoria generalizadas, que no son funciones en el sentido clásico del Análisis Matemático ordinario, y soluciones débiles de ecuaciones integrales. Cuando una sucesión de funciones de memoria no convergen a una función, pero sus transformadas de Laplace si convergen a una función, podemos decir que la primera sucesión no convergente de funciones de memoria, converge en sentido generalizado a un objeto matemático de naturaleza desconocida (función de memoria generalizada), pero que tiene transformada de Laplace. Otra extensión posible es cuando la función f (t) del segundo miembro de (1) no es una función sino una integral divergente de Fourier (o una serie divergente de Fourier), entonces se puede resolver la (1), y obtener para y (t) una solución mediante una integral (o una serie) de Fourier convergente, y a esta solución, la llamamos solución débil de la ecuación integral (1).

La (1) se puede generalizar a integrales dobles y múltiples. Un ejemplo es la:

$$a\, y(x, t) + \int_0^\infty \int_0^\infty k(\sigma, \tau)\, y(x - \sigma, t - \tau)\, d\sigma\, d\tau = 0 \qquad (2)$$

que se puede resolver mediante los métodos descritos en mi memoria antecitada.

La ecuación del calor y la de propagación de las ondas, se pueden obtener como límites generalizados (o sea G-límites) de la (2).

Las soluciones de ecuaciones integrales simples y de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, pueden coincidir, así como las de ecuaciones integrales múltiples, con las de ecuaciones en derivadas parciales lineales de coeficientes constantes, cuando son homogéneas, son distintas cuando no lo son, y siempre son distintas, consideradas como operadores funcionales en vez de como ecuaciones funcionales.

También en la electrodinámica de los medios continuos, concretamente en la teoría de la difusión de la permeabilidad eléctrica en medios dispersivos, la intensidad del campo eléctrico y el desplazamiento o inducción eléctrica, están ligados entre sí, por una ecuación integral, que es un caso particular del tipo (1).

Existe una amplia clase de ecuaciones integrales e integrodiferenciales, en las que la función incógnita aparece bajo el signo de la diferenciación fraccionaria, que aunque tienen una interpretación fenomenológica muy distinta a las anteriores, se resuelven por métodos matemáticos parecidos, basados en el cálculo simbólico (transformación de Laplace). Son las que he denominado oscilaciones *fraccionarias,* que son las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes, en los que las derivadas de la función incógnita son múltiplos enteros de un mismo número fraccionario. Sus soluciones son combinaciones lineales de funciones, cuya transformada de Laplace es de la forma:

$$\frac{p^{1/n}}{p^{1/n} - a} \qquad (3)$$

siendo n un número entero y a la raíz de una cierta ecuación característica, que es algebraica. Si a en vez de ser una raíz simple, es una raíz doble, triple, etc. entonces hay que sustituir el denominador de (3) por su cuadrado, cubo, etc.

Si las ecuaciones no son homogéneas, y su segundo miembro es tal que su transformada de Laplace es de la forma (3), admiten como solución *oscilaciones fraccionarias forzadas.* Y puede darse el fenómeno de la *resonancia fraccionaria,* cuando el segundo miembro de la ecuación completa es solución de la ecuación homogénea, (es oscilación fraccionaria libre).

Se presenta también, para las oscilaciones fraccionarias, al igual que para las lineales clásicas, los problemas de la estabilidad de las soluciones, y mientras que para las clásicas, la estabilidad tiene lugar cuando las partes reales de las raíces de la ecuación característica son nulas o negativas, para las oscilaciones semienteras, la inestabilidad tiene lugar cuando las raíces de su ecuación característica, caen en el semiplano positivo de las x, dentro del ángulo formado por las bisectrices de los ejes. También existen oscilaciones fraccionarias impulsivas, para las semienteras la impulsión viene representada por las potencias semienteras positivas o negativas del tiempo. En cambio para las clásicas, la impulsión viene representada por la delta de Dirac o sus derivadas.

Estas ecuaciones comprenden como caso particular, especialmente importante, el de las vibraciones lineales (soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes ordinarias).

Un caso en que las oscilaciones fraccionarias se expresan mediante funciones trascendentes superiores conocidas, es aquél en que los órdenes de las derivadas de la función incógnita son semienteros. Para éstas, las funciones de error integral de variable real y compleja desempeñan el mismo papel que la función exponencial y las trigonométricas para las oscilaciones lineales ordinarias.

También en Economía, tienen aplicación estas teorías matemáticas, tal es el caso de la llamada correlación lagunar que se presenta en las series cronológicas de la Estadística, y de los efectos de retardo, propios de muchos fenómenos económicos. Me he encontrado y he investigado ecuaciones integrodiferenciales con integrales múltiples, que en vez de ser de la forma (2) lo son de esta otra forma:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r \frac{d^r y}{dt^r} + \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} f(\sigma_1, \dots, \sigma_m)\, y(t - \sigma_1 - \dots - \sigma_m)\, d\sigma_1 \dots d\sigma_m = 0 \qquad (4)$$

cuya solución viene dada por exponenciales, como sucede con la (1), pero cuyos exponentes son raíces de una ecuación característica, distinta a la de aquella. Esta es:

$$\sum_{r=0}^{n} a_r p^r + F(p, p, \ldots, p) = 0 \tag{5}$$

siendo $F(p_1, \ldots, p_m)$ la transformada de Laplace de $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$.

La (1) es un caso particular de la (4), cuando la integral es simple. Se pasa de los límites t y $-\infty$ en la integral de (1) a los límites ∞ y cero de (2), (4) y (6) haciendo el cambio de $t - \tau$ por σ.

Si en (1) sustituimos los límites de la integral t y $-\infty$ por ∞ y t, y en las funciones subintegrales k_s, sustituimos $t - \tau$ por $\tau - t$, se transforma el fenómeno de hereditario en teleológico. Y si en este último caso, hacemos el cambio de $\tau - t$ por σ, se obtienen integrales como las que figuran en (2), (4) o (6) pero con el cambio de $t - \sigma$ por $t + \sigma$.

Otra dirección de generalización que me he planteado y resuelto, es cuando los retardos múltiples conducen a sistemas de ecuaciones integrales del tipo:

$$\int_0^{\infty} g_i(\sigma)\, y_i(t-\sigma)\, d\sigma = \int_0^{\infty} f_i(\sigma)\, y_{i+1}(t-\sigma)\, d\sigma; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{6}$$

cuya solución viene dada multiplicando miembro a miembro, ordenadamente en la cadena:

$$G_i(-\nu)\, x_i(\nu) = F_i(-\nu)\, x_{i+1}(\nu); \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

que conducen a la:

$$x_n(\nu) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{G_i(-\nu)}{F_i(-\nu)} \tag{8}$$

siendo G y F mayúsculas, las transformadas de Laplace (TL) de las g y f minúsculas, pero en cambio las x son las inversas de las transformadas de Laplace (TL^{-1}) de las y. Estos problemas plantean a su vez, algunos otros de convergencia de integrales, bastante complicados.

Obsérvese la diferencia esencial que existe con la problemática clásica y mucho más habitual de las funciones de transferencia. Mientras que en la clásica obtenemos la solución de un problema, hallando la transformada de Laplace (TL) de la solución, en la teoría que aquí exponemos, resolvemos el problema, hallando la inversa de la transformada de Laplace (TL^{-1}) de la solución.

Sistemas de ecuaciones integrales, tales como (6), se encuentran en el análisis de mercados con varios intermediarios, que pueden ordenarse como los números naturales 1, 2, ..., de modo que el intermediario que tiene el número de orden n, hace demanda del producto en el mercado $n - 1$, y oferta del mismo en el mercado n.

Me parece que queda bien patente, que los fenómenos hereditarios son materia interdisciplinar, donde confluyen las Matemáticas, la Física, la Biología y la Economía.

CONTESTACION

AL

DISCURSO DE RECEPCION

DEL

Excmo. Sr. Dr. D. Dario Maravall Casesnoves

por

el Académico numerario

Excmo. Sr. Dr. D. José García Santesmases

Excmo. Sr. Presidente
Muy Ilustre Cuerpo Doctoral
Señoras y señores

Sean mis primeras palabras de agradecimiento a esta ilustre Corporación por honrarme con su representación en este acto. Al propio tiempo deseo señalar mi satisfacción por ser el recipientario el Prof. Dr. Darío Maravall, antiguo y querido amigo con una larga y brillante trayectoria científica.

Terminó, Maravall, el bachillerato con Premio extraordinario en 1940. Eligió la carrera de Ingeniero Agrónomo y según parece no ha habido otro caso tan rápido de ingreso en la Escuela pues solo necesito un año de preparación, en una época en que el procedimiento selectivo consistía en la resolución de problemas matemáticos. Su vocación por las matemáticas le llevó a simultanear la carrera de ingeniero con la de Ciencias Exactas, alcanzando el grado de Doctor en ambas carreras.

Actualmente es Catedrático, por oposición, de Física de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid. Bajo el punto de vista profesional, estuvo primero seis años en Salamanca adquiriendo experiencia con los problemas técnicos y económicos de la agricultura provincial y después volvio a Madrid donde estuvo sucesivamente en la Sección de Ordenación y Fomento de la Producción Agraria y después en el INIA, donde se ha dedicado principalmente a la investigación en matemática aplicada a Agricultura. Estadística y Economía.

Su labor docente es amplia y continuada. Además de la actividad en su Cátedra de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos, se debe mencionar sus enseñanzas en la Escuela de Estadística de la Universidad Complutense y sus seminarios y conferencias en la Universidad de Verano de Santander, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto de Investigaciones Agronómicas, Instituto de Ingenieros Civiles, etc.

Su inquietud científica le llevó a tratar de temas diferentes bajo el punto de vista docente y desarrollar investigaciones en una amplia gama de campos y materias. Esto que podría parecer una dispersión de su labor, no lo es; pues en todos los casos hay siempre un aspecto común: las matemáticas, bien como objetivo fundamental, bien como aplicación de la misma a un problema determinado, bien como herramienta poderosa para investigaciones sobre Física, Biología, Estadística, etc.

En el campo de la docencia se ha ocupado, también, de la didáctica de las matemáticas. En 1963 la OCDE proyectó un seminario Internacional de Matemáticas aplicadas, con aportaciones de los países miembros. Con dicho objeto los diferentes países nombraron Comisiones Nacionales de Matemáticas aplicadas. De la Comisión Española, que tuve el honor de presidir, formaba parte Maravall. Cada Comisión preparó un informe completo sobre los diferentes aspectos de la formación matemática de los ingenieros, teniendo presente el uso de los ordenadores. Pero además, a cada país, se le encomendó un informe especial sobre un tema específico. A España le correspondió el referente a Estadística y Cálculo de Probabilidades. La Comisión Española encargó a los Prof. Sixto Rios y Maravall su redacción. Debo añadir que la lectura de este informe en la Asamblea de Paris, en 1965, tuvo muy buena acogida y se acordó la publicación del mismo, traducido al inglés y francés.

Como ya hemos dicho su trayectoria investigadora sigue sendas diferentes, pero todas ellas bajo el signo matemático. Asi, hay que mencionar sus trabajos: sobre la teoría de la Relatividad, sobre Matemáticas aplicadas a la Ingeniería (teoría de oscilaciones eléctricas y mecánicas, acoplamientos giroscópicos, etc.), sobre ecuaciones diferenciales referidas a oscilaciones hereditarias y teleológicas, (de los que hemos tenido el gusto de oirle disertar en el discurso que acabamos de oir), sobre procesos estocásticos y movimiento browniano, sus aportaciones a la Matemática financiera y actuarial, sus investigaciones sobre Topología y Teoría de las distribuciones, etc. Estos temas que solo he enumerado han dado lugar cada uno a muchos trabajos de investigación y en algunas ocasiones a la publicación de uno o más libros.

Estos versan sobre materias distintas, como Física Matemática, Mecánica y Cálculo Tensorial, Teoría y aplicación de las Oscilaciones lineales y no lineales, Ecuaciones diferenciales y Matrices, Geometría Analítica y Proyectiva, Procesos estocásticos y movimiento browniano y Filosofía Matemática.

Esta extraordinaria labor se ha reflejado en la publicación de veinte libros. Ya se comprende que no podemos hacer un examen de los mismos, como bien sería mi deseo, debido al corto tiempo de que dispongo y a la amplitud y variedad de su obra. Pero si desearía señalar que sus investigaciones han sido citadas en obras de autores nacionales y extranjeros. Así en el libro "Relativity" de Synge figuran dos trabajos suyos y en el de Tonnelat "Les verifications experimentaux de la relativité" se citan dos de sus trabajos. También se citan las investigaciones de Maravall en la obra de Rey Pastor y Castro Brzezicki, sobre "Funciones de Bessel".

En el libro de "Mecánica no lineal" del Prof. Castro Brzezicki también se reproducen investigaciones de Maravall sobre Econometría.

También son mencionados sus trabajos en las obras de texto de Rey Pastor y Castro "Elementos de Matemáticas" y "Complementos de Matemáticas".

Cinco de sus trabajos son citados en el libro de H. Wold "Times, Series and Stochastics Processes" y el Prof. Grimm de Jena refiriéndose a sus publicaciones de

1958 y 1959, las considera como "importantes contribuciones a los procesos estocásticos". El Prof. Richter de la Academia de Berlin ha alabado sus trabajos sobre procesos estocásticos escribiendo (en 1965) que "Entre las nuevas investigaciones, ante todo son dignas de destacarse los trabajos de D. Maravall". También en el libro "The Theory of Branching Processes" se citan los trabajos de Maravall.

En 1968 ingresa en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales con un discurso que trató de la "Economía y la Sociología como motores de la Investigación Matemática".

En el mismo año se le tributaron sendos homenajes, uno con motivo de ser nombrado Miembro de Honor de la Asociación Nacional de Ingenieros Agrónomos y otro en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos en una sesión científica donde pronunció una lección de su propio curso ordinario. También se le encarga dicho año la lección magistral en la entrega de títulos en su Escuela a varias promociones y la conferencia de clausura en el Coloquio Hispano-Francés de Investigación operativa en Valencia.

Ha intervenido activamente en las tareas científicas de la Real Academia de Ciencias. Con motivo del Cincuentenario de la Mecánica Cuántica pronunció las Conferencias de apertura y clausura recogidas en el curso publicado por la Academia. Tanto estas conferencias como la de Apertura de curso de la Academia constituyen la base del libro que ha escrito sobre "Fundamentos de Mecánica Cuántica". Ha pronunciado también conferencias sobre investigación operativa y con motivo del centenario de Einstein.

Ha publicado trabajos en el Boletín del Instituto Politécnico de Jassy (Rumania), y de la Academia Toscana di Scienze e Lettere.

La terminología científica ha sido también tema de trabajo de Maravall, habiendo publicado un Diccionario de Matemática Moderna y dando conferencias y publicando trabajos sobre esta materia.

Hay que señalar también dentro de esta gran labor científica llevada a cabo por Maravall, su dedicación a la Filosofía y a la Historia de las Ciencias.

Desgraciadamente, debido a la premura de tiempo no podemos profundizar ni extendernos más en la obra del recipientario. Nos limitamos a destacar que su labor investigadora se halla plasmada en unos ciento cincuenta trabajos.

Refiriéndome ahora al interesante discurso, tan brillantemente expuesto por el Prof. Maravall, debo señalar primeramente que el tema desarrollado es extraordinariamente sugestivo. En efecto, el estudio conjunto de la *herencia,* en el sentido temporal, con la *herencia* en el sentido espacial, es decir, considerando la acción a distancia; según la cual la configuración que adopta *un sistema en una cierta región del espacio, influye sobre la que adopta en cualquier otra parte.* Análogamente a los fenómenos hereditarios temporales en los que es preciso el conocimiento de la historia del sistema, en los espaciales es preciso conocer la geografía o topografía del sistema para prever su evolución futura.

En este sentido el Dr. Maravall ha hecho generalizaciones en el estudio de propagación del calor y de la propagación de ondas.

Sin entrar en los temas abordados por el recipientario, tan sugerentes como, por ejemplo, los llamados por él espacios aleatoriales, que pueden aplicarse a la Economia, Biologia, etc., o bien la teoría de las emociones que propone llamar Noofísica, voy a decir unas palabras sobre los fenómenos hereditarios en el sentido temporal, que en el campo de la Física tienen un excelente ejemplo en los fenómenos de histéresis elástica, según señala Maravall. También se pueden señalar los de histéresis magnética, que hace algunos años estudié con alguna atención.

Considerando un núcleo ferromagnético en estado virgen, cuando se somete a un campo de intensidad $H(G)$. Haciendo uso de las ecuaciones integrales de Volterra, la inducción $B(G)$ queda representada por una ecuación cuyo segundo miembro tiene dos términos: el primero $G(H)$ depende de los valores instantáneos del campo magnético y puede asimilarse a la curva de primera imanación y el segundo término es un funcional que depende de todos los valores por los que ha pasado el campo magnético, es decir, representa la herencia del material. Consideré la hipótesis de que el campo H es sinusoidal y que la herencia es lineal.

Más adelante nuestras investigaciones sobre sistemas ferrorresonantes nos llevaron nuevamente a los problemas de histéresis. El más sencillo de aquellos sistemas está constituido por un circuito con resistencia, bobina con núcleo ferromagnético y capacidad, bien en serie o en paralelo. Su estudio entra dentro de los sistemas no lineales. Un análisis riguroso de estos sistemas requiere una expresión analítica exacta del ciclo dinámico de histéresis del núcleo ferromagnético pero debemos observar que aunque esta expresión se pudiera conseguir exactamente, no por ello disminuirían las dificultades para la resolución de las ecuaciones diferenciales no lineales que se presentan.

En muchas ocasiones el estudio del sistema ferrorresonante se ha abordado sin tener en cuenta el ciclo de histéresis, y si solamente las pérdidas producidas por este fenómeno.

Para tener en cuenta la histéresis, se llegó a una expresión analítica para el ciclo dinámico de histéresis y otro para las pérdidas por histéresis. El ciclo está representado por una ecuación general que conduce a tres formas simplificadas. Una de ellas particularmente útil para el análisis de circuitos no lineales, debido a su formulación matemática. Los polinomios característicos que se presentan en estas expresiones pueden deducirse de puntos experimentales que definen el ciclo de histéresis. Las expresiones analíticas del ciclo de histéresis, se aplicaron al circuito ferrorresonante, de esta forma se pudieron establecer las condiciones del *salto* ferrorresonante y la estabilidad de los puntos de equilibrio en estado permanente, partiendo de los parámetros del circuito.

Nos acaba de explicar el Dr. Maravall la penetración cada vez mayor de las Matemáticas en la Biología. Ello se realiza en un campo muy amplio. La biología y particularmente la neurofisiología han aceptado términos y denominaciones propios de la teoría de la información, como mensaje, redundancia, calificación, comunicación, para describir el sistema nervioso central. Haré, solo unos comentarios sobre el sistema nervioso. Dada su complejidad, exige basarse en la teoría de Autómatas y en la teoría de la Información. Generalmente se utiliza el método de los modelos con objeto de obtener los principios fundamentales de funcionamiento de los centros nerviosos e incluso de los cerebros de los animales superiores. Con este método de los modelos, se trata de analizar las funciones que el sistema nervioso realiza, pero no los *mecanismos* mediante los cuales los lleva a cabo, es decir se trata de diseñar un dispositivo o máquina que cumpla las mismas funciones en condiciones idénticas. Naturalmente si el método tiene éxito, ello significa que en el modelo considerado, todo se produce *como en la función biológica simulada* aunque los mecanismos utilizados sean distintos.

Se trata de que el modelo se asemeje al sistema biológico en lo que a la relación entrada-salida se refiere, pero cuya estructura puede ser distinta de la forma en que aquel realiza la función.

La forma que adopte el modelo depende no solo de los datos experimentales que se posean sino además de las tendencias y formación básica del que lo construye. En realidad, intervienen, generalmente, personas de formación diversa, matemáticos, físicos, biólogos, fisiólogos, ingenieros, etc., dando lugar a equipos de trabajo heterogéneos pero con una gran riqueza de técnicas y puntos de vista, ya que un problema específico es abordado desde ángulos muy distintos.

En 1943, McCulloch y Pitts propusieron la *neurona formal,* unidad elemental basada en la neurona fisiológica. Partiendo de esta neurona formal se pueden establecer redes neuronales, en las que la salida de cada neurona se puede conectar con una o varias entradas de otras neuronas. Estas redes no son fiel reflejo de la realidad fisiológica, como ya hemos dicho antes, pero partiendo de estas hipótesis se ha edificado un sistema lógico que permite almacenar información y realizar cálculos.

En 1963 hicimos varios trabajos sobre simulación de neuronas, estableciendo un modelo electrónico de la neurona fisiológica. Una analogía que permite explicar la seguridad de funcionamiento en ciertas operaciones mentales o físicas, controladas por el cerebro, a pesar de la fragilidad de los elementos que constituyen este, se halla en los autómatas fiables a partir de componentes no fiables, iniciados por Von Neumann y desarrollados por Vinograd y Cowan.

Estas investigaciones llevan de la mano a plantear el problema del carácter rígido o aleatorio de la organización cerebral en relación con la función de aprendizaje.

Otro tipo de simulación interesante dentro de la neurofisiología es el que se refiere al reconocimiento de formas, aprendizaje, la función de decisión. Entre los modelos que se han propuesto hay que destacar el *Perceptron* de Rossenblatt y el *Informon* de Uttley; este último asimila el cerebro a una computadora de probabilidades condicionales.

Con estos breves comentarios al discurso de nuestro nuevo compañero, hemos tratado de mostrar algunas de las aplicaciones de las matemáticas a los fenómenos hereditarios y a los sistemas neurofisiológicos.

Es para mi una gran satisfacción dar mi bienvenida en nombre de esta Corporación al Prof. Maravall. Estoy seguro de que su incorporación a nuestras tareas representará una aportación de positivo valor dadas sus cualidades científicas que contribuirán sin duda al mayor prestigio de esta Real Academia de Doctores y de la Ciencia española.

LIBROS DEL ACADEMICO Y PROFESOR DARIO MARAVALL CASESNOVES

En la Editorial brasileña Globo

Teoría e Aplicaçoes das Oscilaçoes (traducido por el Doctor Ingeniero Ruy Pinto da Silva) 1964.

Editado por el Instituto de España

Lineas de Investigación en los Procesos Estocásticos y el Movimiento Browniano, 1975.

En la Editorial Dossat

Ingeniería de las Oscilaciones, 1959.
Geometría Analítica y Proyectiva (dos tomos) (2^a edición) 1965.
Ecuaciones Diferenciales y Matrices (2^a edición) 1965.
Mecánica y Cálculo Tensorial (2^a edición) 1965.
Problemas de Mecánica (dos tomos) 1962.
Física Matemática, 1966.
Filosofía de las Matemáticas, 1961.
Teoría de la Investigación Matemática, 1966.
Didáctica y Dialéctica Matemáticas, 1969.
Física Fundamental, 1969.
Matemática Financiera, 1970.
Métodos Matemáticos de la Ingeniería (éste último en colaboración con el catedrático D. Antonio de Castro) 1961.

En la Editora Nacional

Grandes Problemas de la Filosofía Científica, 1973.
Diccionario de Matemática Moderna, 1975.

Editado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia

Estadística Teórica y Aplicada (este libro en colaboración con el Doctor Ingeniero D. Juan Miguel Soler). 1976.

En la Editorial Paraninfo

Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos, 1974.

Editado por la Escuela T.S. de Ingenieros Agrónomos de Madrid

Curso de Mecánica en forma de problemas, 1978.
Fundamentos de Mecánica Cuántica, 1979.